Шифр:

С-12

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
математика
2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа Сиверская гимназия

Класс 11²

ФИО Лукашов Никита Вадимович

Чистовик С-12

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	0	14

№ 1.

1. Из условия следует, что число первого ≥ 2, второго ≥ 3, третьего ≥ 4, ..., девятого ≥ 10 и десятого ≥ 11. ~~Следовательно, девятый и десятый во второй раз не могли сказать правду.~~

2. Предположим, что девятый и десятый - рыцари. Но тогда на второй вопрос они солгали (т.к. каждый из них должен был сказать число строго меньшее 10, что противоречит их первому высказыванию*) Противоречие $\Rightarrow$ среди 10 человек существует хотя бы 2 лжеца $\Rightarrow$ рыцарей не более, чем 8.

Оценка получена.

Пример: с первого по восьмого - все рыцари, девятый и десятый - лжецы. Вот один из их возможных диалогов.

	1-ый вопрос	2-ой вопрос
1-ый:	$2>1$	$2<3$
2-ой:	$3>2$	$3<4$
3-ий:	$4>3$	$4<5$
4-ый:	$5>4$	$5<6$
5-ый:	$6>5$	$6<7$
6-ой:	$7>6$	$7<8$
7-ой:	$8>7$	$8<9$
8-ой:	$9>8$	$9<10$.
9-ый:	$5<9$	$5>2$ – лжецы
10-ый:	$5<10$	$5>1$ – лжецы.

*какими бы по счёту они ни были.

Ответ: 8 рыцарей.

№2.

1. Из условия следует, что дискриминанты многочленов x^2+ax+b и $x^2+ax+b+1$ являются точными квадратами каких-то $\mathbb{Z}$ чисел. Отсюда:

$$\left.\begin{array}{l} a^2-4b=m^2,\ m\in\mathbb{Z} \\ a^2-4b-4=n^2,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow m^2-4=n^2 \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=2\cdot 2.$$

Т.к. m и $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим все возможн. случаи.

$m-n=$	1	4	2	-2	-1	-4
$m+n=$	4	1	2	-2	-4	-1
$2m=$	5	5	4	-4	-5	-5

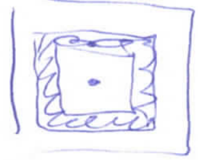
$\Rightarrow m=\pm 2 \Rightarrow a^2-4b=4.$

2. $x^2+ax+b+2$ имеет дискриминант $a^2-4b-8=4-8=-4<0 \Rightarrow$ он (трёхчлен) корней не имеет, quod erat demonstrandum

№3.

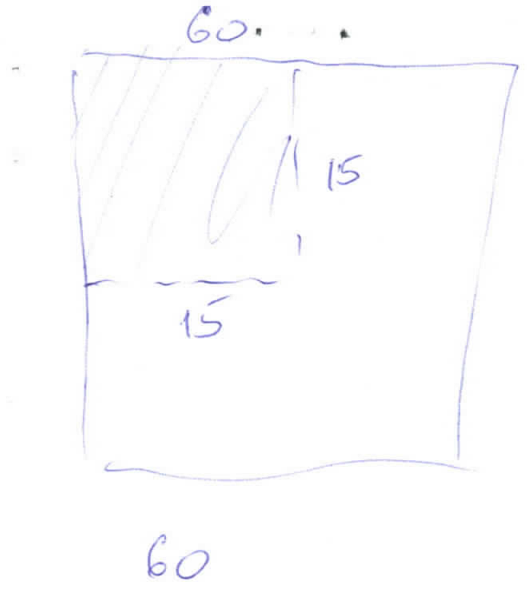
1. ~~Если король стоит в цент~~ ~~Король бьк~~

Клетки, расстояние от которых до заданной клетки образуют квадрат ~~30x30~~ 32x32 (или его часть). Точнее „каёмочку":



2. Рассмотрим квадрат 60x60.

Докажем НОП, что ~~в него можно поставить не более 225~~ в нём можно отметить не более 225 клеток так, как требуется в условии.

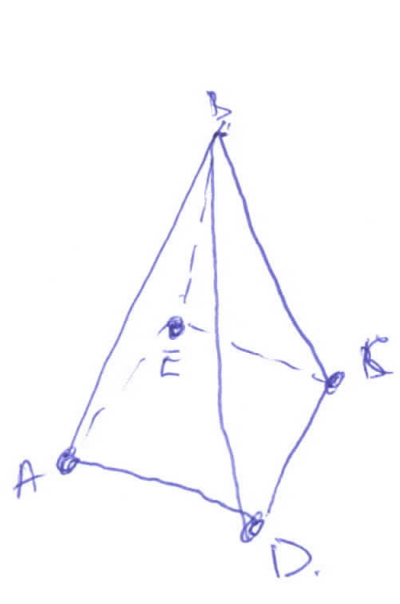


III – 225 коробок.

№4.

1. Докажем утверждение задачи МОП:
Предположим, что члены последовательности либо с какого-то N убывают, либо ~~члены~~ последовательность то возрастает, то убывает, то есть возрастание обязательно сменяется убыванием, ~~либ~~ и убывание обязательно сменится возрастанием.
2. Т.к. $P_n(x)$ имеет корень a_{n+1}, то
$P_n(x) = (x - a_{n+1}) \cdot Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен, оставш. от деления $P_n(x)$ на $x - a_{n+1}$.

№5.



1. $V_{ABED} + V_{DEBC} = V_{ABCE} + V_{ADEB}$
(т.к. у этих тетраэдров общие высоты).
2. Плоскость α проходит через центр сферы, описанной вокруг тетраэдра ABCD

Чистовик С-12

1	2	3	4	5	Σ
7	7	X	2	0	16

№ 11.6.

1. Обозначим 4 послед. числа через $a, a+1, a+2, a+3$.

2. Рассмотрим 2 случая:

I. a – чётное $\Rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{Z}$, и из условия: $a > 100 \Rightarrow k > 50$.

Возьмём числа $a+1, a+2, a+3$. Их сумма: $6k+6 = 2 \cdot 3 \cdot (k+1)$. $k+1 > 51 \Rightarrow$ искомое представление.

II. a – нечётное $\Rightarrow a = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 50$.

Возьмём числа $a, a+1, a+2$. Их сумма: $3a+3 = 6k+6 = 2 \cdot 3 \cdot (k+1) \Rightarrow$ искомое представление, quod erat demonstrandum.

№ 11.7.

1. Для доказательства утверждения задачи, достаточно доказать, что $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. (*)

2. (*) $\Leftrightarrow 2^{n+1} \cdot \left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right) < 2^n \cdot \left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot a^{\frac{1}{2^{n+1}}} - 2 < a^{\frac{1}{2^n}} - 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{2^n}} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} t = a^{\frac{1}{2^n}} \\ t \neq 1 \\ t > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} < t + 1 \Leftrightarrow t - 2\sqrt{t} + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{t} - 1) > 0$, что, очевидно, верно для $t \neq 1$, quod erat demonstrandum.

№11.9

Ответ: 28.

Докажем сначала оценку методом от противного.

Предположим, что учеников $\geq 29 \Rightarrow$ по принципу Дирихле и из условия задачи существует ученик (назовем его первым), который сходил в бассейн ≥ 29 раз, также существует другой ученик (назов. его вторым), который сходил в бассейн ≥ 1 раза и существует ещё один ученик (назовем его третьим) отличный от первых двух, который сходил в бассейн ≥ 28 раз. (потому что мы имеем 30 дней и 29 учеников с различным ненулевым кол-вом посещений).

Из условия, второй ученик ходил в бассейн в день, ~~кога~~ когда первый туда не ходил. Назовём этот единственный день прекрасным. Аналогично в прекрасный день ходил и третий ученик.

Заметим, что первый ученик ходил в бассейн ровно 29 раз, т.к. иначе рассмотрев его со вторым учеником получим противоречие. Аналогично второй ученик ходил в бассейн ровно 1 раз и третий ученик - 28 раз (т.к. ~~между~~ от 1 до 29 ровно 29 различных N чисел).

Но также в прекрасный день должен был побыть и третий ученик ⇒ третий и второй ученики не имеют дня, когда ~~не~~ второй пошёл, а третий нет. Противоречие!!!

Таким образом оценка на 28 учеников доказана.

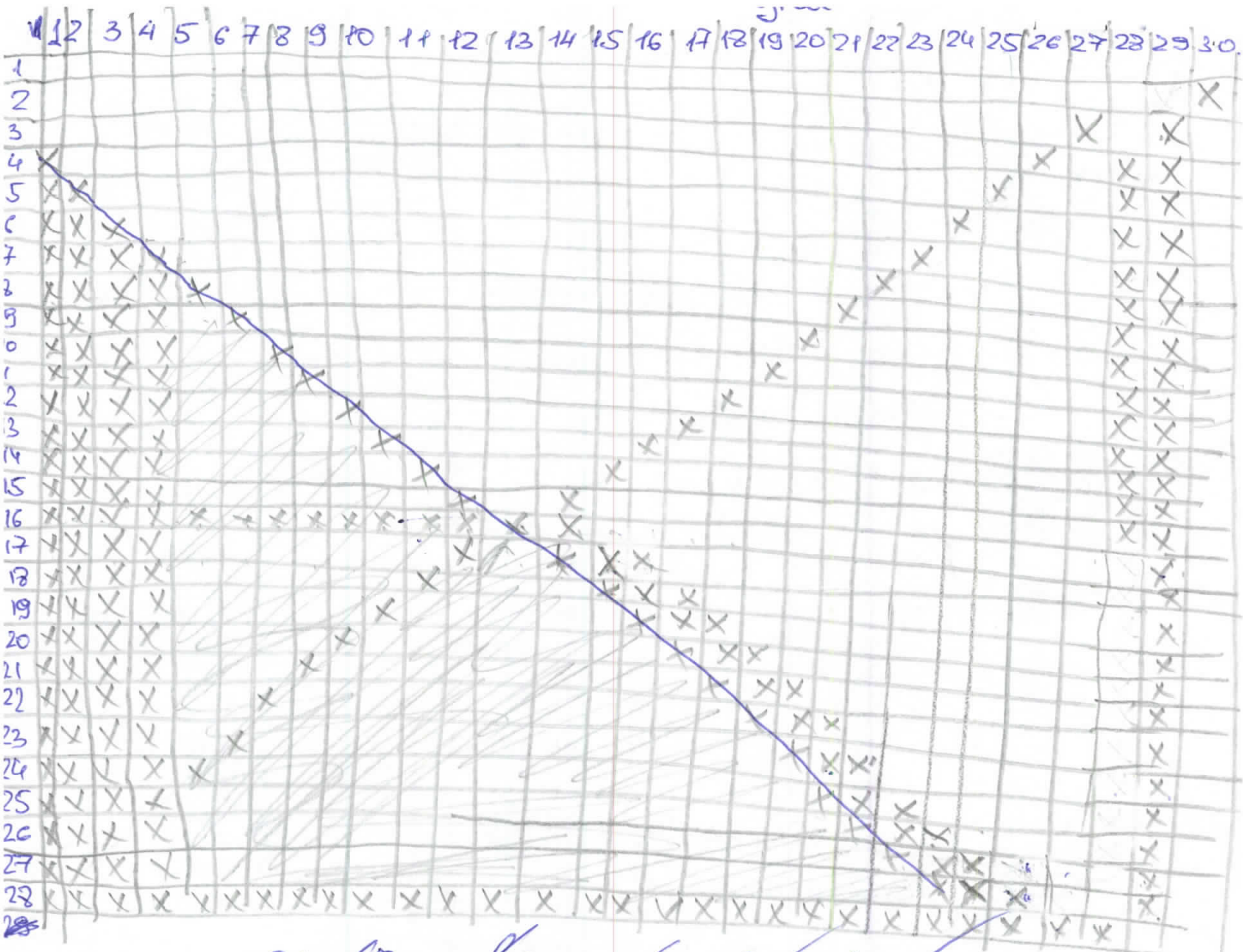
Теперь будем приводить пример.
Ничего лучше, кроме как нарисовать таблицу посещений я придумать не могу, поэтому - см. оборот.
Проверить можно следующим образом: ученики не конфликтуют, если существ. отмеченные клетки у каждого ученика, напрот. к-ой нет закраш. у другого.

№10 11.10

Ответ: $\frac{1}{4}n^2$

см. оборот

3



30 учеников

заштрихованное - все в крестиках
диагональ - граница.

Кол-во посещений, очевидно, различно.

структура примера, в целом, думаю, понятна.

Примера нет.

№ 11.10.

~~Ответ $\frac{1}{4n}$~~

Решение:

1. Для начала заметим, что Вася не может получить как можно меньшее число, поскольку Петя называет, например, $x_i = \frac{1}{2n}$.

$i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$. И тогда будет выписано число $\frac{1}{4n^2}$, и Петя может назвать ~~число~~

$x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_i = \frac{1}{2(2n-1)}$, $i \in \{2, 3, \ldots, 2n\}$ и тогда на доске будет выписано $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{4(2n-1)}$.

А $\frac{1}{4(2n-1)} > \frac{1}{4n^2} \Leftrightarrow 4n^2 - 8n + 1 > 0 \Leftrightarrow$, что очевидно верно при $n \geq 2$.

То есть, таким образом, минимум Васи, которой он хочет, кажется, зависит от игры Пети.

~~Покажем, что кроме случая~~.

Т.к. $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n}) = 1$. (*)

По неравенству о средних:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$$
$$+ \quad x_1^2 + x_3^2 \geq 2x_1x_3$$
$$\ldots$$
$$x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 \geq 2x_{2n-1}x_{2n}$$

$$(2n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2) \geq 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n}).$$

$$(*) \Rightarrow 1 \geq \left(\frac{2}{2n-1} + 2\right)(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{4n} \geq x_1x_2 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n}.$$

Теперь для решения задачи нам нужно указать, какие числа называет Петя и доказать, что для остальных других вариантов Вася может получить произведение меньше, чем в приведённом примере.